CLASA a 10-a

1. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ o funcţie cu proprietatea $|f(x)+f(y)+f(z)|\leqslant|f(x+y+z)|$, oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{C}$. Arătaţi că $f(x)+f(y)=f(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{C}$.

George Stoica, Canada

Soluţie. Avem $3|f(0)|\leqslant|f(0)|$, deci $f(0)=0$ şi $|f(x)+f(-x)|\leqslant|f(0)|=0$, deci $f(-x)=-f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{C}$ **3p**

Deducem $|f(x)+f(y)-f(x+y)|=|f(x)+f(y)+f(-x-y)|\leqslant|f(x+y-x-y)|=0$, de unde concluzia **4p**

2. Determinaţi funcţiile crescătoare $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care au proprietatea $f(f(n))+f(n)=2n+3$, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$.

Petre Guţescu, Tulcea

Soluţie. Arătăm că $f(n)=n+1,\forall n\in\mathbb{Z}$ **1p**

Dacă presupunem $f(n)\leqslant n$ pentru un anumit n, atunci $f(f(n))\leqslant f(n)\leqslant n$, ceea ce duce la $f(f(n))+f(n)\leqslant 2n$ – contradicţie, deci $f(n)\geqslant n+1,\forall n\in\mathbb{Z}$ **3p**

Dacă presupunem $f(n)\geqslant n+2$ pentru un anumit n, atunci $f(f(n))\geqslant f(n+2)\geqslant n+3$, deci $f(f(n))+f(n)\geqslant 2n+5$ – contradicţie. Rămâne astfel $f(n)=n+1,\forall n\in\mathbb{Z}$ **3p**

3. Arătaţi că $\dfrac{\sqrt[3]{17+\sqrt{297}}+\sqrt[3]{17-\sqrt{297}}-1}{3}$ este soluţie a ecuaţiei $x^4+1=2\sqrt[4]{2x-1}$.

Eugen Radu, Bucureşti

Soluţie. Dacă luăm $f:[0,\infty)\to[1/2,\infty)$, $f(x)=(x^4+1)/2$, atunci ecuaţia se poate scrie $f(x)=f^{-1}(x)$ şi are printre soluţii şi pe cele ale ecuaţiei $f(x)=x$ **2p**

Ultima ecuaţie este $x^4-2x+1=(x-1)(x^3+x^2+x-1)$ **2p**

Arătăm că numărul dat α anulează cel de-al doilea factor. Observăm că $(3\alpha+1)^3=34+3\sqrt[3]{17+\sqrt{297}}\sqrt[3]{17-\sqrt{297}}(3\alpha+1)$, deci $(3\alpha+1)^3=34+3\sqrt[3]{-8}(3\alpha+1)$, de unde $27\alpha^3+27\alpha^2+9\alpha+1=34-18\alpha-6$, sau $\alpha^3+\alpha^2+\alpha=1$ **3p**

4. Arătaţi că, dacă $\sin 2x$ şi $\sin 3x$ sunt numere raţionale, atunci $\sin nx$ este număr raţional, oricare ar fi numărul natural n.

Mihail Bălună, Bucureşti

Soluţie. Din ipoteză rezultă $\cos 4x\in\mathbb{Q}$ şi $\cos 6x\in\mathbb{Q}$. Apoi $\cos 2x+\cos 6x=2\cos 2x\cos 4x$ implică $\cos 2x\in\mathbb{Q}$ sau $2\cos 4x-1=0$; în al doilea caz ar reieşi $4x=\pm\pi/3+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, deci $3x=\pm\pi/4+3k\pi/2$, în contradicţie cu $\sin 3x\in\mathbb{Q}$ **2p**

Mai departe $\cos 2x-\cos 4x=2\sin x\sin 3x$ implică $\sin x\in\mathbb{Q}$ sau $\sin 3x=0$; în al doilea caz reiese $x=k\pi/3$, iar $\sin 2x\in\mathbb{Q}$ duce la $k=3l$, $l\in\mathbb{Z}$. Astfel, în toate cazurile, $\sin x\in\mathbb{Q}$ ... **3p**

În plus, din $\sin x\in\mathbb{Q}$ şi $\sin 2x\in\mathbb{Q}$ rezultă imediat $\cos x\in\mathbb{Q}$ **1p**

Soluţia se finalizează acum inductiv, arătând că $\sin nx\in\mathbb{Q}$ şi $\cos nx\in\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}$ **1p**